Министерство образования Оренбургской области
Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
«Техникум транспорта г. Орска имени Героя России С.А. Солнечникова»

Рассмотрено на заседании
методического совета
протокол № ____
от «____»_____ 201__ г

УТВЕРЖДАЮ
Директор
_____ Е.П. Стародубцев

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ДИСЦИПЛИНЫ ЕН.01 МАТЕМАТИКА

для специальности среднего профессионального образования

23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (железно дорожный транспорт)

Разработала
Преподаватель высшей категории Т.В. Ткаченко

Орск, 2017 год

Содержание

Пояснительная записка

Практическое занятие - это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических работ - формирование у обучающихся профессиональных умений, а также практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Так, на практических занятиях по математике у обучающихся формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам.

В ходе практических работ обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по математике:

1) расширение и закрепление теоретических знаний по математике, полученных в ходе лекционных занятий;

2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по математике;

3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;

4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения математики;

5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются обучающимися самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от обучающегося требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, обучающийся получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться обучающимися индивидуально или фронтально.

Зачетную отметку по каждой практической работе обучающийся получает после её выполнения и предоставления в письменном виде,

оформленной в специальной тетради для практических работ, чернилами синего цвета.

Критерии оценки практических заданий

Отметка «5» ставится, если:

-работа выполнена полностью;

-в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

-в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

- допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Отметка «3» ставится, если:

- допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме;

- при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием обучающихся основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.
К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.
При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

Практическое занятие № 1

Тема: *Операции над матрицами. Вычисление определителей разными методами. Нахождение обратной матрицы. Вычисление ранга матрицы.*

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Методические рекомендации:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица *B* имеет размер *m*x*n*» означает, что речь идет о матрице, состоящей из *m* строк и *n* столбцов. Например, матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер *2*x*3*. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на *i-ю* строку матрицы *A* используют обозначение A_i, при ссылке на *j-й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы *A* (размера *n*x*n)* образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*x*3*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица *A* является верхней треугольной, *B* – диагональной, *C* – нижней треугольной, *E* – единичной.

Матрицы *A, B* называются *равными* (*A*=*B*), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A - B = 2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$

$$= 2(-1 \cdot 0 - 2 \cdot 5) + 3(4 \cdot 0 - 2 \cdot 3) - 1(4 \cdot 5 - (-1) \cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *mxn* и *B* размера *nxp*, при этом *AB=C*, матрица *C* имеет размер *mxp,* и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *A* 3x2, матрицы *B* 2x2. Поэтому произведение *AB* найти можно, произведение *BA* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице *A* размера *m*x*n,* называется матрица A^T размера *n*x*m,* строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.* Можно доказать, что ранг матрицы *A* (размера *m*x*n*) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы *A* размера *2*x*3* $r(A) \le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице *B* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3 = -C_2$):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителей. Определитель матрицы *A* размера *2*x*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*x*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения выполнить предложенный преподавателем вариант задания.
2. Соответствующим образом оформить работу

<u>Перечень справочной литературы :</u>

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

Практическая работа № 1

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & 0\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}^T+2\begin{pmatrix}5 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ -8 & 10 & 4\end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 8 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 8\\ 3 & 8 & 5\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & 10 & 3\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & 2 & -9\end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 10\\ 2 & 4 & 8 & -1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}-5 & 6\\ 2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 5\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}-1 & i\\ i & -1\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & -10\end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 4 & 7\\ -3 & 1 & 5\end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$;

Практическое занятие № 2

Тема: *Вычисление миноров и алгебраических дополнений. Решение систем линейных уравнений матричным методом.*

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

Методические рекомендации:

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из *m* уравнений с *n* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (*)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (*), называется матрицей системы (ее размер – *m*x*n*), а вектор $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ (*m*-мерный)-столбцом (вектором) свободных членов. Матрицу вида $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называют расширенной матрицей системы (*).

Любой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, образующих *n*-мерный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, является решением системы (*), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ при каждом *i=1,2,…,m* (*i-е* уравнение представляет собой скалярное произведение *i-й* строки матрицы системы на вектор *X*), и (*) можно переписать в виде

$$AX = B. \qquad (**)$$

Запись (**) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (*).

Пример 1. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$.

Решение. Очевидно, что $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -7 \\ 6 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Записать СЛАУ, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Введем в рассмотрение вектор X и с каждым столбцом мысленно сопоставим неизвестное: с первым столбцом - x_1, со вторым - x_2, с третьим - x_3, с четвертым - x_4. Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_4 = -4 \\ -2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}.$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений. Определения и основные теоремы. Если СЛАУ (*) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной* (соответственно, система *несовместная*, если она вообще не имеет решений). Совместная система (*) называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (*) будем называть *приведенной* (а саму систему *канонической*), если в каждой *i-й* строке *(i=1,2,…,m)* есть элемент $a_{ij} = 1$, а все остальные элементы *j-го* столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть *ведущими,* а оставшиеся неизвестные назовем *свободными*.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). СЛАУ (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е выполняется равенство $r(A) = r(A|B)$.

Для совместной системы число $r = r(A) = r(A|B)$ назовем рангом системы.

Теорема 2 (о количестве решений). Пусть СЛАУ (*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r = n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением системы.*

Практическая работа № 2

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ.

1) $\left(A\middle|B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array}\right)$

2) $\left(A\middle|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array}\right)$

3) $\left(A\middle|B\right)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

4) $\left(A\middle|B\right)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right)$

Задание 2. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -x_1+4x_3=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -x_1+4x_3=4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=1 \\ -3x_1+4x_2+4x_3=-2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -2x_1-x_2+8x_3=20 \end{cases}$

Практическое занятие № 3

Тема: *Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.*

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

Методические рекомендации:

Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход.* Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A) = r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. *Обратный ход*. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 3. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3=C_3-2C_1]{C_2=C_2+4C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3+C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3=C_3/10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B) = r(A) = 3 = r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1=C_1-2C_3]{C_2=C_2-11C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[C_2=-C_2/6]{C_1=C_1-C_2/6} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2=-1 \\ x_3=1 \\ x_1=3 \end{cases}$ и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: $X=(3;1;1)^T$. Это и есть ответ.

Пример 4. Для СЛАУ $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 10x_1+12x_2+3x_3+10x_4=16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой.

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3=C_3-3C_1]{C_2=C_2-2C_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A|B)=r(A)=3=r$, число неизвестных $n=4$ и в соответствии с теоремой 6.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные: x_3 в первой строке, x_1 во второй, x_4 в третьей. Свободное неизвестное - x_2. Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1=C_1-2C_2]{C_2=C_2-4C_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1=C_1-3C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные: $\begin{cases} 4x_2+x_3=-8 \\ x_1=3 \\ x_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-8-4x_2 \\ x_1=3 \\ x_4=1 \end{cases}$. Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: $X_{об}=(3;\quad x_2;\quad -8-4x_2;\quad 1)^T$, x_2 - любое вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать свободному неизвестному x_2 конкретное числовое значение. Например, при $x_2 = 0$ $X_ч = (3;0;-8;1)^T$, а при $x_2 = -1$ $X_ч = (3;-1;-4;1)^T$.

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (*)$$

Теорема 3 (теорема Крамера). Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

где $|A|_i$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены *i-го* столбца на столбец свободных членов.

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем *A* - матрицу системы и *B* - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22) - (-1)(33-33) + 4(-6-12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \dfrac{|A|_1}{|A|} = \dfrac{180}{60} = 3$; $x_2 = \dfrac{|A|_2}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$; $x_3 = \dfrac{|A|_3}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$. Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2\cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3\cdot 3 + 4\cdot 1 - 2\cdot 1 \equiv 11$, $3\cdot 3 - 2\cdot 1 + 4\cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Практическая работа № 3

Задание . Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

Практическое занятие № 4

Тема: *Задание множеств. Операции над множествами*

Цель: сформировать умение выполнять операции с множествами

Методические рекомендации:

Множество – одно из основным понятий математики.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$ ($\in$ — принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$ ($\subset$ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то $A \cup B$ = {1,2,3,4,5,6}

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то $A \cap B$ = {2,4}

Разностью множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множесву A, но не принадлежат множеству B.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}

Симметричной разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B$, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть $A \Delta B = (AB) \cup (BA)$.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то $A \Delta B$ = {1,2} $\cup$ {5,6} = {1,2,5,6}

Свойства:

Свойства перестановочности:

$A \cup B = B \cup A$

$$A \cap B = B \cap A$$

Сочетательное свойство:

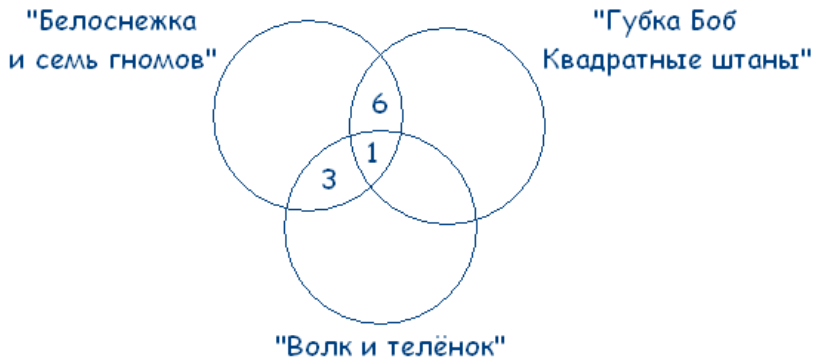
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

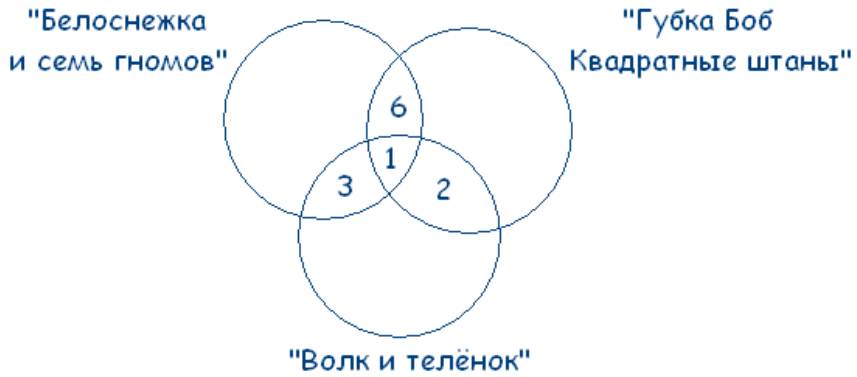
Круги Эйлера (Эйлера-Вена) — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

Пример: Среди школьников шестого класса проводилось анкетирование по любимым мультфильмам. Самыми популярными оказались три мультфильма: «Белоснежка и семь гномов», «Губка Боб Квадратные Штаны», «Волк и теленок». Всего в классе 38 человек. «Белоснежку и семь гномов» выбрали 21 ученик, среди которых трое назвали еще «Волк и теленок», шестеро – «Губка Боб Квадратные Штаны», а один написал все три мультфильма. Мультфильм «Волк и теленок» назвали 13 ребят, среди которых пятеро выбрали сразу два мультфильма. Сколько человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны»?

Решение: В этой задаче 3 множества, из условий задачи видно, что все они пересекаются между собой. Получаем такой чертеж:



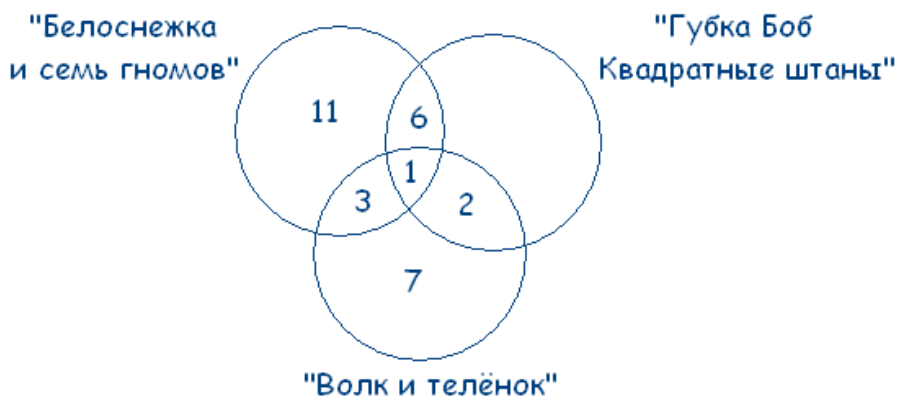
Учитывая условие, что среди ребят, которые назвали мультфильм «Волк и теленок» пятеро выбрали сразу два мультфильма, получаем:



21 – 3 – 6 – 1 = 11 – ребят выбрали только «Белоснежку и семь гномов».

13 – 3 – 1 – 2 = 7 – ребят смотрят только «Волк и теленок».

Получаем:



38 – (11 + 3 + 1 + 6 + 2 + 7) = 8 – человек смотрят только «Губка Боб Квадратные Штаны».

Делаем вывод, что «Губка Боб Квадратные Штаны» выбрали 8 + 2 + 1 + 6 = 17 человек.

Ответ. 17 человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны».

Практическая работа № 4

Задание 1. 1) Найти множества A∩B, AUB, A/B, B/A, если:

а) A={e, o, p, x} B={x, y}
б) A={x: -3<x<4} B={x: 0≤x≤6}
в) A={2^n+1}, B={n+1} nєN
2) Найти множества A∩B, AUB, A/B, B/A, если:
а) A={12, 13, 14, 15} B={12, 14, 16}
б) A={x: 0<x<2} B={x: 1≤x≤4}
в) A={3-(n+1)}, B={n+5} nєN

Задание 2. 1) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) только один язык?
б) испанский язык?
в) только немецкий язык?
г) знают английский и немецкий, но не знают французский?

2) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) ровно два языка?
б) только французский язык?
в) знают немецкий и французский, но не знают английский?
г) не знают испанский язык?

Практическое занятие № 5

Тема: *Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей.*

Цель: на конкретных заданиях отработать навыки использования замечательных пределов непрерывности функций.

Методические рекомендации:

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^\infty\right)=e.$$

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

б) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2y}-1}{y}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}$;

д) $\dfrac{\ln(1+3y)}{y}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

и) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}$;

Решение.

а) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

б) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}2\cdot\frac{(1+2y)^{\frac{1}{2}}-1}{2y}=\quad 2y=x\quad=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

в) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1+\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$$

г) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} bx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin bx}{\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b}{\cos bx}=$$

$=1\cdot b=b$.

д) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+3y)}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}3\cdot\frac{\ln(1+3y)}{3y}=\ 3y=x\ =$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=3\cdot 1=3.$$

е) имеем:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)(x-1)}=\ x-5=t\ =$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+4)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+4}=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

ж) имеем:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{введем новую}\\ \text{переменную } y=2x\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^2=e^2.$$

и) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{\frac{2y}{2}}=\left[\frac{y}{2}=x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Практическая работа № 5

1 Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ является бесконечно малой:

а) $\alpha(x)=\sin(x-2)$ при $x\to 2$;

б) $\alpha(x)=x^2-3x+2$ при $x\to 1$;

в) $\alpha(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.

2 С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^3-2x^5}{5x+3x^3+x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\sin 2x}-1}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt[4]{x^4-7x^8}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{\arcsin^2 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sqrt[4]{16x^4+x^8}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\sin^2 x-\operatorname{arctg}2x}$.

3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{x+2}$;

г) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{t}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$;

л) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t}{e^{3t}-1}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos^2 x}{x^2}$;

н) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{2x^2}{x^2-4}\right)$.

Практическое занятие № 6

Тема: *Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва.*

Цель: сформировать умение исследовать функцию на непрерывность и наличие точек разрыва, определять род точек разрыва.

Методические рекомендации:

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция называется непрерывной, если:

1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \quad \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Функция называется непрерывной на некотором промежутке *X*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Пример 1: Доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ непрерывна на (-∞;+∞)

Решение:

$$\Delta f = \left(3(x_0 + \Delta x)^2 - 2(x_0 + \Delta x) + 1\right) - \left(3x_0^2 - 2x_0 + 1\right) = 3x_0^2 + 6x_0 \Delta x + 3\Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 - 3x_0^2 + 2x_0 - 1 =$$

$$= 6x_0 \Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} \left(6x_0 \Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x\right) = 0$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Классификация точек разрыва:

1) x_0 – точка устранимого разрыва, если а) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$

   б) в точке x_0 функция не определена

2) x_0 – точка разрыва I рода, если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

   $h = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ - скачок функции

3) x_0 – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует

Пример 2:

Найти точки разрыва функции и установить их тип

$$a)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \begin{cases} x^2+1, x<1 \\ 0, x=1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right)=2$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(x+1\right)=2$$

$$f(1)=0$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \textit{точка} \quad \textit{устранимого} \quad \textit{разрыва}$$

$$б)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \begin{cases} x^2, x\le 1 \\ x-2, x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0} x^2 = 1 \ne \lim_{x\to 1+0}\left(x-2\right)=-1$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad \textit{I} \quad \textit{рода}$$

$$h=-1-1=-2$$

$$в)\ y=2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\infty} = \infty$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad \textit{II} \quad \textit{рода}$$

Практическая работа № 6

Задание 1. Доказать, что функция является непрерывной

$a)\ f(\mathrm{x}) = x+9$

$б)\ f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3+8$

$в)\ f(\mathrm{x}) = 2\,\mathrm{x}^2+6x-5$

$г)\ f(\mathrm{x}) = 10\,\mathrm{x}^2-12x$

Задание 2. Найти точки разрыва и установить их тип

$$a)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \begin{cases} -e^{-x}, x<0 \\ 0, x=0 \\ e^{x}, x>0 \end{cases}$$

$$б)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\sin x}{x}$$

$$в)\ y = f(\mathrm{x}) = e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$г)\ \mathrm{y} = f(\mathrm{x}) = \frac{\cos x}{x}$$

Практическое занятие № 7

Тема: *Вычисление производных по таблице. Вычисление производных сложных функций.*

Цель работы:

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Вычисление производных».

Методические рекомендации:

Перечень справочной литературы :

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

Правила дифференцирования

1) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$;

2) $(u \times \upsilon)' = u' \times \upsilon + \upsilon' \times u$, в частности $(cu)' = cu'$;

3) $(\frac{u}{\upsilon})' = \frac{u' \times \upsilon - \upsilon' \times u}{\upsilon^2}$;

4) $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$, если $y = f(u), u = \varphi(x)$;

5) $y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, если $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$.

Формулы дифференцирования

1.$(C)' = 0$

2.$(u^{\alpha})' = \alpha \times u^{\alpha - 1}$, в частности, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$;

3.$(a^u)' = a^u$, в частности, $(e^u)' = e^u$;

4.$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}$, в частности, $(\ln u)' = \frac{1}{u}$;

$5.(\sin u)' = \cos u$; $6.(\cos u)' = -\sin u$; $7.(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}$; $8.(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}$;

$9.(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; $10.(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; $11.(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2}$;

$12.(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}$;

Примеры нахождения производной элементарных функций:

$y = \left(x^3 + 3x^2 - 5\right) \times e^x$;

1) $y' = \left(3x^2 + 6x\right) \times e^x + \left(x^3 + 3x^2 - 5\right) \times e^x =$

$\left(2x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 4x\right) \times e^x$.

$y = xarctgx - \frac{1}{2}\ln x$;

2) $y' = (x)' arctgx + x(arctgx)' - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}' =$

$= arctgx + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2x}$

3) $y = \frac{\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 + 1\right)}$;

$$y' = \frac{\left(x^2 - 1\right)'\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{2x\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 + 1\right) \times 2x}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{4x}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

4) $y = x^5 - \cos x$, *найти* $y'(0)$

$y' = 5x^4 + \sin x$, $y'(0) = 5 \times 0^4 + \sin 0 = 0 + 0 = 0$

Производная сложной и обратной функций

Определение. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция с промежуточным аргументом x и независимым аргументом x.

Теорема. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'(x)$ в точке x, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'(u)$ в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y'(x)$ в точке x которая находится по формуле $y'(x) = y'(u) \times u'(x)$.

Правило нахождения производной сложной функции:

Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько.

Пример. Вычислить производную сложной функции:

1) $y = \ln\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)$.

Решение:

$$y = \ln\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right) = \left|(\ln u)' = \frac{1}{u}(u)'\right| = \frac{1}{\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)}\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)' =$$

$$= \left|(u+v)' = u'+v';\ \left(e^{kx}\right)' = k\,e^{x};\ (\sqrt[n]{u^m})' = (u^{\frac{n}{m}})' = \frac{n}{m}u^{\frac{n}{m}-1}u'\right| =$$

$$= \frac{4e^{4x} + \frac{4e^{4x}}{3}\left(e^{4x}+1\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(e^{4x} + \sqrt[3]{e^{2x}+1}\right)}$$

2) $y = x\,arctg(2x+1) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$;

Решение:

$$y' = (x)'\,arctgx + x\left(arctg(2x+1)\right)' - \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+x^2}\left(1+x^2\right)' =$$

$$= 1\times arctgx + \frac{x}{1+(2x+1)^2}\times(2x+1)' - \frac{2x}{2(1+x^2)} = arctgx + \frac{x}{2x^2+2x+1} - \frac{x}{1+x^2}.$$

Практическая работа № 7

Вариант 1

Найдите производную функции:

1) $y=\frac{7}{x}+3\sqrt{x}-tg2x-3^x$

2) $y=cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

3) $y=(3x^5+8x^3+7x^2-\sqrt{3})^5$

4) $y=\sqrt{2-5x}+(3x-5)^6$

5) $y=\frac{(3x-5)^4}{(2x-4)^3}$

Вариант 2

Найдите производную функции:

1) $y=\frac{8}{x}-2\sqrt{x}+cos3x-\ell^{2x}$

2) $y=sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-ctg\left(x+\frac{5\pi}{6}\right)$

3) $y=\left(4x^6-7x^2+9x+\frac{\pi}{4}\right)^4$

4) $y=(9x-1)^5+\sqrt{5-x^2}$

5) $y=\frac{(5-2x)^3}{(3x+7)^4}$

Вариант 3

Найдите производную функции:

1) $y=\frac{4}{x}+5\sqrt{x}+ctg2x+5^x$

2) $y=sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-tg\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

3) $y=\left(4x^3-9x^2+3x-\frac{1}{3}\right)^4$

4) $y=(2x-9)^{10}+\sqrt{3x-1}$

5) $y=\frac{(8-5x)^4}{(2x-4)^3}$

Вариант 4

Найдите производную функции:

1) $y=sin3x-\frac{1}{x}+6\sqrt{x}-\ell^{4x}$

2) $y=cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-tg\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$

3) $y=(8x^6-25x^2-8x+\pi)^5$

4) $y=(3-8x)^5+\sqrt{5-2x}$

5) $y=\frac{(4-8x)^3}{(6-5x)^4}$

Вариант 5

Найдите производную функции:

1) $y = -\frac{15}{x} + 2\sqrt{x} - ctg3x + 5^x$

2) $y = tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

3) $y = \left(-2x^7 + 4x^5 - \sqrt{3}x\right)^4$

4) $y = (8x - 7)^3 + \sqrt{9 - 3x}$

5) $y = \frac{(4x - 9)^4}{(3 - 5x)^3}$

Вариант 6

Найдите производную функции:

1) $y = -\frac{5}{x} - 7\sqrt{x} + sin2x - \ell^{3x}$

2) $y = ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

3) $y = \left(7x^5 - 2x^3 + 8x - \frac{\pi}{2}\right)^5$

4) $y = (3 - 8x)^3 + \sqrt{4 - x^3}$

5) $y = \frac{(4 - 5x)^3}{(4x + 7)^4}$

Практическое занятие № 8

Тема: *Полное исследование функции. Построение графиков.*

Цель работы:

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Исследование функции при помощи производных. Исследование и построение графиков»

Методические рекомендации:

Перечень справочной литературы :

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: учебное пособие для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

Исследование функции при помощи производных

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in$(a;b), в которой производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

Теорема Коши. Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале (a;b), причем $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in$ (a;b) то найдется хотя бы одна точка $c \in$(a;b) такая, что выполняется равенство $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in$(a;b) такая, что выполняется равенство $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Следствие 1 Если производная некоторой функции на промежутке равна нулю, то функция постоянна на этом промежутке.

Следствие 2 Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Возрастание и убывание функций

Теорема 1. (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале (a;b) функция $y = f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ для любого $x \in (a;b)$.

Теорема 2. (достаточные условия). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a;b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a;b).

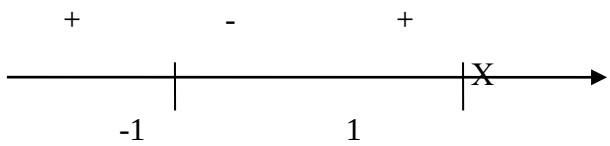
Теоремы 1 и 2 позволяют довольно просто исследовать функцию на монотонность (функция, убывающая или возрастающая, называется монотонной).

Пример. Исследовать функцию $f(x)$ =x^3-3x-4 на монотонность.

Решение:

$x \in R = (-\infty;+\infty)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)\times(x+1)$



$f'(x) \geq 0$ при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$

$f'(x) \leq 0$ при $x \in [-1;1]$

Ответ: данная функция возрастает при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ и убывает $x \in [-1;1]$

Максимум и минимум функций

Теорема (необходимое условие). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f(x)$ =0.

Теорема (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева на право) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Удобно использовать другой достаточный признак существования экстремума основанный на определении знака второй производной.

Теорема. Если в точке x_0 первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю $(f'(x) = 0)$, а вторая производная в точке x_0 существует и отличная от нуля $(f''(x) \neq 0)$, то при $f''(x_0) < 0$ в точке x_0 функция имеет максимум и минимум - при $f''(x_0) > 0$.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала (a;b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый вверх.

Если же $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a;b)$ - график выпуклый вниз.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Асимптоты бывают вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая x=a является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.

Если существует наклонная асимптота y=Rx+b, то R и b находится по формуле: $R = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} (y - Rx)$.

Если R=0, то y=b- уравнение горизонтальной асимптоты.

Общая схема исследования функции и построения графика функции

Исследование функции целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.

3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x)$ >0 или $f(x)$ <0).

4. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.

5. Найти асимптоты графика функции.

6. Найти интервалы монотонности функции.

7. Найти экстремумы функции.

8. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

1. $x \in (-\infty;-1),(-1;1),(1+\infty)$

2. $x = 0, y(0) = 0$

Точка (0;0)- точка пересечения графика с осями ОХ и ОУ.

3. Функция знакоположительна (y>0) в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$, знакоотрицательна – в $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$

4. Функция $y = \frac{x}{1-x^2}$ является нечетной т.к. $y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x)$. Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x \geq 0$.

5. Прямые x = 1 и x = -1 являются ее вертикальными асимптотами.

Выясним наличие наклонной асимптоты.

$$R = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (\frac{x}{1-x^2} - 0 \times x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота ее уравнение y=0. Наклонных асимптот нет.

Прямая y=0 является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

6. $y' = (\frac{x}{1-x^2})' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$.

Так как y'>0 в области определения, то функции является возрастающей на каждом интервале области определения.

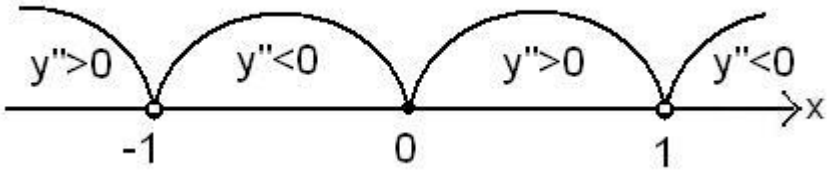
7. Т.к. $y' = \frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}$, то критическими точками является точки

$x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

Данные точки не принадлежат области определения функции, значит, функция экстремумов не имеет.

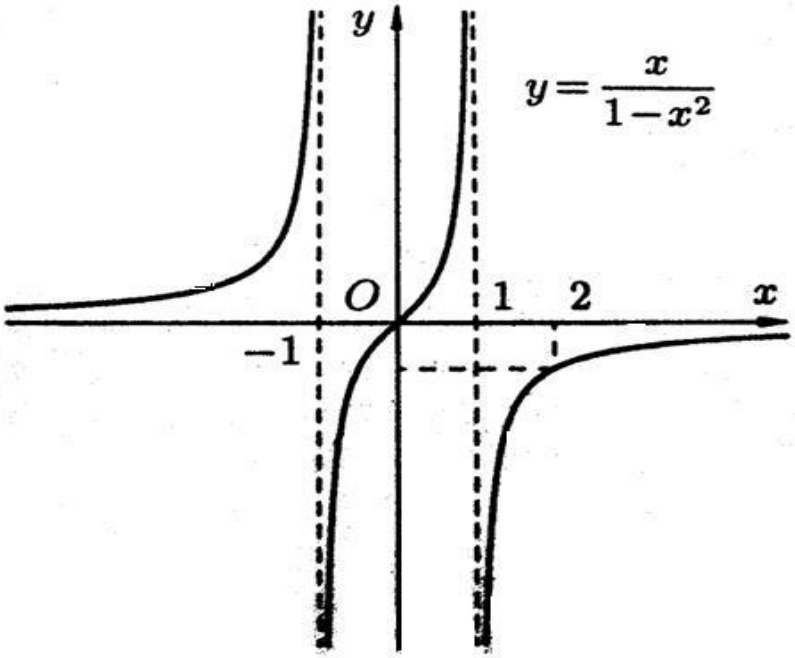
8. Найдем y”

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$



Точка (0;0) – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;+\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$



Практическая работа № 8

Задание провести полное исследование функции

Вариант №1

1. y = $x^3 - 3x^2 + 4$
2. y = $\frac{5-2x}{x^2-4}$

Вариант №2

1. y = $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{1}{3}$
2. y = $\frac{x}{x^2-1}$

Вариант №3

1. y = $-x^3 + 3x^2 - 2$
2. y = $\frac{x^2}{x^2-1}$

Вариант №4

1. y = $-x^3 + 3x^2 - 2$
2. y = $\frac{x^3}{x^2-1}$

Вариант №5

1. y = $x^3 - 12x + 6$
2. y = $\frac{2x}{x^2+1}$

Вариант №6

1. y = $x^3 - 12x^2$-9x+1
2. y = $\frac{1}{x^2+1}$

Вариант №7

1. y= $x^3 - 6x^2 + 9x - 3$
2. y = $\frac{2x}{x^2+1}$

Вариант №8

1. y = $x^3 - 12x^2$-9x+1
2. y = $\frac{x^2}{x^2+1}$

Вариант №9

1. y = $x^3 + 9x^2 + 24x + 12$
2. y = $\frac{x^2}{6x+18}$

Вариант №10

1. y= $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$-2x-y= $\frac{1}{3}$ $\frac{x^2}{x-2}$

Практическое занятие № 9

Тема: *Вычисление неопределенного интеграла по таблице.*
Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле.

Цель работы:

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основные методы интегрирования»»

Методические рекомендации:

Перечень справочной литературы :

1. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 416 с.
2. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2013. – 320 с.
3. Шипачев В.С. Основы высшей математика: учебник для вузов. -М. Высш.шк., 2010 г.

Неопределенный интеграл

Основные свойства неопределенного интеграла

$1^0 (\int f(x)dx)' = f(x)$; $2^0 \; d\int f(x)dx = f(x)dx$;

$3^0 \int dx(x) = F(x) + c$; $4^0 \int k f(x)dx = k\int (x)dx$;

$5^0 \int [f(x) \pm g(x)] = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

12.2. Таблица основных интегралов.

$1. \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, (\alpha \neq -1)$, в частности, $\int du = u + c$;

$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$; $3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$; $4. \int e^u du = e^u + c$; $5. \int \sin u du = -\cos u + c$;

$6. \int \cos u du = \sin u + c$; $7. \int tgu du = -\ln|\cos u| + c$; $8. \int ctgu du = \ln|\sin u| + c$;

$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$; $10. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$; $11. \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + c$;

$12. \int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c$; $13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$;

$14. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + c$; $15. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + c$;

$16. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c$; $17 \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin\frac{u}{a} + c$;

$18. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \times \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c.$

Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Определение. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интегрирования приводится к одному или нескольким табличным интегралом, называется непосредственном интегрированием.

Примеры:

1) $\int \frac{d(x)}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + c$

2) $\int \left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x}\right) d(x) = 4\int x^3 dx - \frac{5}{2}\int \frac{d(2x)}{\cos^2 2x} - \int 3^{1-x} d(1-x) =$
$x^4 - \frac{5}{2} tgx - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + c$

Метод интегрирования подстановкой

Метод подстановки (или замены переменной) заключается в том, что заменяют x на $\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция, полагают $dx = \varphi'(t)$ и получают

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt .$$

Примеры:

1) $\int \cos 3x dx = \left| \begin{matrix} 3x = t \\ (3x)'dx = dt \end{matrix}; \begin{matrix} 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{matrix} \right| = \int \cos t \times \frac{1}{3} \sin t + c = \frac{1}{3} \sin 3x + c$

2) $\int \sin(7x+8)dx = \left| \begin{matrix} 7x+8 = t \\ 7dx = dt \end{matrix}; dx = \frac{1}{7}dt \right| = \int \sin t \times \frac{1}{7} dt \Big| = -\frac{1}{7}\cos t + c = -\frac{1}{7}\cos(7x+8) + c$

3) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \end{matrix}; dx = -\frac{dt}{2x}dt \right| = -\int \frac{\cancel{x}dt}{\sqrt{t} \times 2\cancel{x}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2} \times \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c =$
$= -\frac{1}{2} \times 2 \times t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$

4) $\int (15-3x)^7 dx = \left| \begin{matrix} 15-3x = t \\ -3dx = dt \end{matrix}; dx = -\frac{1}{3}dt \right| = \int t^7 \times (-\frac{1}{3})dt = -\frac{1}{3} \times \frac{t^8}{8} + c = -\frac{(15-3x)^8}{24} + c$

13.3. Метод интегрирования по частям

$$\boxed{\int u d\upsilon = u \times \upsilon - \int \upsilon du}$$

Вид интеграла	Подстановка
$\int P(x) arctgx dx; \int P(x) arcctgx dx; \int P(x) \ln x dx;$ $\int P(x) \arcsin x dx; \int P(x) \arccos x dx; P(x)$ - многочлен.	$u = arctgx$ $u = arcctgx$ $u = \ln x$ $u = \arcsin x$ $u = \arccos x$ $d\upsilon = P(x)dx$ $\upsilon = [первообразная P(x)]$
$\int P(x) e^{kx}; \int P(x) \sin kx dx; \int P(x) \cos kx dx,$ k – *некоторое число* *P(x) – многочлен.*	$u = P(x)$ $d\upsilon = e^{kx} dx$ $\upsilon = [первообразная E^{kx}]$ $d\upsilon = \sin kx dx$ $\upsilon = [первообразная \cos kx]$
$\int e^{ax} \cos bx dx; \int e^{ax} \sin bx dx$ a и b *некоторые числа.*	*Двукратное интегрирование* *Например:* $\int e^x \cos x dx = \left\| \begin{matrix} u = e^x & dx = \cos x dx \\ du = e^x dx & \upsilon = \sin x \end{matrix} \right\| =$ $= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left\| \begin{matrix} u = e^x & d\upsilon = \sin x dx \\ du = e^x dx & \upsilon = -\cos x \end{matrix} \right\| =$ $= e^x \sin x - (-e^x \cos + \int e^x \cos x dx)$. $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + c$.

Примеры:

1) $\int \ln x dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \right\| = x \times \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$

2) $$\int (2x+1)e^{3x}d(x) = \left| \begin{array}{l} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| =$$

$$= (2x+1)\times\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,2xdx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + c$$

Практическая работа № 9

№1. Применяя метод непосредственного интегрирования, вычислить интегралы:

Вариант 1

1. $\int (\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}})dx$
2. $\int e^x (2 - \frac{e^{-x}}{x^3})dx$
3. $\int (2^x + 3^x)dx$
4. $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$

Вариант 2

1. $\int (x^4 + \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x})dx$
2. $\int (\sin x + 5\cos x)dx$
3. $\int e^x (1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx$
4. $\int ctg^2 x dx$

№2. Пользуясь методом подстановки вычислить интегралы:

Вариант 1

1. $\int \cos 5x dx$
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx$
3. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$
4. $\int \frac{e^{4x}}{e^x - 1} dx$

Вариант 2

1. $\int \sin 7x dx$
2. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$
4. $\int e^{\sin x} \cos x dx$

№3. С помощью метода интегрирования по частям вычислить интегралы:

Вариант 1

1. $\int (4x^3 + 6x - 7)\ln x dx$
2. $\int x \ln x dx$
3. $\int x e^{-x} dx$
4. $\int \arcsin x dx$

Вариант 2

1. $\int (x^2 + 3x + 2)\ln x dx$
2. $\int x \ln(3x+2) dx$
3. $\int x e^{5x} dx$
4. $\int \cos(\ln x) dx$

Практическое занятие № 10

Тема: *Вычисление определенных интегралов разными методами. Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.*

Цель работы:

Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основные методы интегрирования»»

Методические рекомендации:

Основные свойства определенного интеграла

$1^0 \int_a^b f(x)dx = 0$; $2^0 \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

$3^0 \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$; где *a, b, c* любые числа.

$4^0 \int_a^u kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; $5^0 \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Формула Ньютона – Лейбница

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке [a;b] и функция y = *F(x)* является некоторой ее первообразной на этом отрезке, то имеет место формула Ньютона – Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Вычисление определенных интегралов

Простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

При вычислении определенных интегралов широко используется метод замены переменной и метод интегрирования по частям.

Интегрирование подстановкой

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции сделана подстановка $x = \varphi$ (t)

Теорема. Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и её производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [d; \beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha; \beta]$ является отрезок [a;b];

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ **то** $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$

Интегрирование по частям

Теорема. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], то имеет место формула $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$.

Пример.

Вычислить $\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx$.

Решение:

$$\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & dx = \sin\frac{x}{2}\,dx \\ & \\ du = e^x dx & x = -2\cos\frac{x}{2} \end{array} \right| = -2\cos\frac{x}{2}e^x \Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} e^x \cos\frac{x}{2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^x & dx = \cos\frac{x}{2}\,dx \\ & \\ du = e^x dx & x = 2\sin\frac{x}{2} \end{array} \right| = -2\cos\frac{\pi}{2}e^{\pi} + 2\cos\frac{0}{2}e^0 + 2\left(2e^x \sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx \right) =$$

$$= 2 + 4e^{\pi}\sin\frac{\pi}{2} - 4e^0 \sin\frac{0}{2} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}dx = 2 + 4e^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx$$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx = 1 + 2e^{\pi}$$

Ответ: $\int_0^{\pi} e^x \sin\frac{x}{2}\,dx = 1 + 2e^{\pi}$

Практическая работа № 10

Вариант 1:

1. Вычислить методом непосредственного интегрирования следующие определенные интегралы:

1) $\int\limits_{-\frac{n}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} 3(1+z^2)dz$

2. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

3) $\int\limits_{-2}^{1} (5-2x)^2 dx$ 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3-\cos x} dx$ 5) $\int\limits_{0}^{1} e^{x^2} x dx$

Вариант 2:

1. Вычислить методом непосредственного интегрирования следующие определенные интегралы:

1) $\int\limits_{-\frac{n}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 2) $\int\limits_{-1}^{1} 5(y^2+1)dy$

2. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

3) $\int\limits_{2}^{3} (2x-1)^2 dx$ 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2+\sin x} dx$ 5) $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 3e^{x^3} x^2 dx$

Вариант 3:

1. Вычислить методом непосредственного интегрирования следующие определенные интегралы:

1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ 2) $\int\limits_{0}^{2} 4(x-x^3)dx$

2. Вычислить следующие интегралы методом подстановки:

3) $\int\limits_{4}^{5} (4-x)^3 dx$ 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$ 5) $\int\limits_{0}^{\frac{n}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos x dx$

Практическое занятие № 11

Тема: *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.*

Цель: На конкретных примерах отработать навыки решения дифференциальных уравнений

Методические рекомендации:

Пример 1. Решить уравнение: $y' = \dfrac{ye^x}{1+e^x}$

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными вида (2), так как его можно переписать в виде:

$$y' = y \cdot \frac{e^x}{1+e^x};\ f(x) = \frac{e^x}{1+e^x},\ g(y) = y.$$

Приведем его к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{e^x}{1+e^x} \quad \Big| \cdot dx$$

$$dy = y \cdot \frac{e^x}{1+e^x} \cdot dx \quad \Big| : y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

Теперь его можно интегрировать:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

$$1) \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + c_1;\ 2) \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{d(1+e^x)}{1+e^x} = \ln\left|1+e^x\right| + c_2$$

$\Rightarrow \ln|y| + c_1 = \ln\left|1+e^x\right| + c_2$, обозначим $c_2 - c_1 = \ln|c| \Rightarrow$

$$\ln|y| = \ln\left|1+e^x\right| + \ln|c| \Rightarrow y = c(1+e^x)$$

Получим общее решение уравнения.

Проверим, не потеряно ли решение $y = 0$?

Подставим в заданное уравнение $y = 0$, а тогда и $y' = 0$. Получим $0 = 0$.

Значит, $y = 0 -$ решение данного уравнения, но оно принадлежит полученному общему решению при $c = 0$.

Ответ: $y = c(1+e^x)$.

Пример 2. Решить уравнение:

$$6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$$

Решение. Соберём слагаемые, содержащие dx и dy:

$$6xdx + 2xy^2dx = 3x^2ydy + 6ydy$$

$$2x(3+y^2)dx = 3y(x^2+2)dy \quad \Big| : (3+y^2)(x^2+2) \neq 0$$

Это уравнение вида (3), так как:

$$f_1(x) = x^2 + 2, \qquad g_1(y) = 3y, \qquad f_2(x) = 2x, \qquad g_2(x) = 3 + y^2.$$

Разделим переменные:

$$\frac{2x}{x^2+2}dx = \frac{3y}{3+y^2}dy$$

Интегрируя, получаем:

$$\int \frac{2x}{x^2+2}dx = \int \frac{3y}{3+y^2}dy \Rightarrow \int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} = \frac{3}{2}\int \frac{d(y^2+3)}{3+y^2}$$

$$c_1 + \ln\left|x^2+2\right| = \frac{3}{2}\ln\left|y^2+3\right| + c_2.$$

$$\frac{1}{2}\ln|c| + \ln\left|x^2+2\right| = \frac{3}{2}\ln\left|y^2+3\right|, \text{ где } \frac{1}{2}\ln|c| = c_1 - c_2.$$

$$\ln|c| + 2\ln\left|x^2+2\right| = 3\ln\left|y^2+3\right|$$

$c(x^2+2)^2 = (y^2+3)^3$ – это общий интеграл уравнения.

Так как уравнения $x^2+2=0$ и $y^2+3=0$ не имеют действительных решений, то при интегрировании уравнения не могли быть потеряны решения.

Ответ: $c(x^2+2)^2 = (y^2+3)^3$.

Пример 3. Решить задачу Коши:

$$(1+y^2)dx - xydy = 0, \; y(1) = 0.$$

Решение. Уравнение $(1+y^2)dx - xydy = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными вида (3), так как:

$$f_1(x) = -x; \quad g_1(y) = y; \quad f_2(x) = 1; \quad g_2(y) = 1 + y^2.$$

Разделим переменные, поделив уравнение на $x(1+y^2) \neq 0$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{1+y^2}$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{1+y^2}$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2}$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right| + c_2.$$

Обозначим $c_1 - c_2 = \ln|c|$:

$$\ln|x| + \ln|c| = \frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|$$

$cx = \sqrt{1+y^2}$ – общий интеграл уравнения.

Используя начальное условие: $y(1) = 0$, получим частное решение

$$c \cdot 1 = \sqrt{1+0^2} \Rightarrow c = 1.$$

Значит, частное решение данного уравнения при заданном начальном условии имеет вид:

$$x = \sqrt{1 + y^2}$$

Ответ: $x = \sqrt{1 + y^2}$.

Пример 4. Решить уравнение:

$$y' = \cos(y - x).$$

Решение. Выполним замену: $y - x = z \Rightarrow z' = y' - 1 \Rightarrow y' = z' + 1.$

Тогда уравнение изменится:

$$z' + 1 = \cos z \Rightarrow z' = \cos z - 1.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными вида (2), так как $f(x) = 1; \quad g(z) = \cos z - 1.$ Разделим переменные:

$$\frac{dz}{dx} = \cos z - 1 \Rightarrow dz = (\cos z - 1)\,dx \quad \Big| : (\cos z - 1) \neq 0 \Rightarrow \frac{dz}{\cos z - 1} = dx.$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx \Rightarrow \int \frac{dz}{-2\sin^2 \frac{z}{2}} = \int dx \Rightarrow -\frac{1 \cdot 2}{2} \int \frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2 \frac{z}{2}} = x + c_2 \Rightarrow ctg\,\frac{z}{2} + c_1 = x + c_2.$$

Обозначим $c_2 - c_1 = c$, тогда $ctg\,\frac{z}{2} = x + c$.

Так как $z = y - x$, то общим интегралом будет: $\cos\frac{y - x}{2} = x + c$.

Решим уравнение $\cos z - 1 = 0 \Rightarrow \cos z = 1 \Rightarrow z = 2\pi k, k \in Z$. Тогда *z´=0.*

Подставим в заданное уравнение и получим тождество: 0+1=1. Значит, $z = 2\pi \cdot k$ или $y - x = 2\pi \cdot k$ – решение для данного уравнения, но не входит в общий интеграл.

Ответ: $\cos\frac{y - x}{2} = x + c; y - x = 2\pi \cdot k, k \in Z$.

Практическая работа № 11

Решить уравнения или задачи Коши:

1. $\mathrm{tg}x \cdot \sin^2 y dx + \cos^2 x \cdot \mathrm{ctg} y dy = 0;$
2. $2x \cdot x' = \pi^y \ln \pi;$
3. $3y' \ln x + \dfrac{y^4}{x} = 0, y(e^e) = 1;$
4. $y - xy' = 2(1 + x^2 y');$
5. $(1 + e^x) yy' = e^x, y(0) = 1;$
6. $3e^x tgydx = \dfrac{e^x - 1}{\cos^2 y} dy;$
7. $3(y^2 + 4)\sqrt{\arccos x} = 2y'\sqrt{1 - x^2};$
8. $4y^3 \sin^2 xdy + dx = 0;$
9. $\arccos \dfrac{1}{x} dx = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})dy, x(0) = 1;$
10. $2e^{2y} y' ctge^{2y} \sqrt{4 - x^2} = 1, y(0) = \ln\sqrt{\dfrac{\pi}{2}};$
11. $y'(3y^2 + 2y + 1) = 3\sqrt{5 - 2x};$
12. $\dfrac{2 + \ln^2 y}{y(1 + \ln^2 y)} \sqrt{\sin x} = x' \cos x;$
13. $xy' = y \ln 7y;$
14. $(y^2 - 1)dx = 2\sqrt{x^2 - 4}dy;$
15. $3y^2 y' + 16x = 2xy^3, y(x) -$ ограничено при $x \to +\infty;$
16. $(2x + 3y - 1)dx + (4x + 6y - 5)dy = 0;$
17. $y' = (x + y)^2;$
18. $y' = tg^2(x + y), y(0) = 0;$
19. $y' = \sin^2(1 - x + 2y);$
20. $y' = y + 2x + 1, y(0) = 4;$

Практическое занятие № 12

Тема: *Нахождение математического ожидания случайной величины.*

Цель: На конкретных примерах отработать навыки нахождения математического ожидания и дисперсии.

Методические рекомендации:

Дисперсия дискретной случайной величины

Пусть X –случайная величина и M(X)-ее математическое ожидание.

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием X - M(X).

Теорема 1. Математическое ожидание отклонения равно нулю:

M[X-M(X)]=0

Иногда вместо термина «отклонение» используют термин «центрированная величина».

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

D(X)=M(X)-[M(X)] .

Теорема 2.Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата

случайной величины X и квадратом ее математического ожидания: .

Практическая работа № 12

Задание 1. Найти математическое ожидание случайной величины Z , если известны математические ожидания X и У: А) Z=X=2Y , M(X)=5, M(У)=3; б) Z=3X+4Y, M(X)=2, M(У)=6.

*Ответ:*11

Задание 2. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: x_1=4 с вероятностью p_1=0,5; x_2=6 с вероятностью p_2=0,3 и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=8.

Ответ:x_3=21; p_3=0,2.

Задание 3. Дан перечень возможных значений дискретной величины X: x_1=1, x_2=2, x_3=3, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: M(X)=2.3, $M(X^2)$=5,9. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

Ответ:p_1=0,2; p_2=0,3; p_3=0,5.

Задание 4. Дан перечень возможных значений дискретной величины X: x_1 =-1 , x_2 =0, x_3=1, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: M(X)=0,1, $M(X^2)$=0,9. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

Ответ: p_1=0,4; p_2=0,1; p_3=0,5.

Задание 5.Используя свойство математического ожидания, доказать, что а) M(X-У)= M(X)-M(У); б) математическое ожидание отклонения X-M(X) равно нулю.

Задание 6. В партии из 10 деталей содержится три нестандартных. Наудачу отобраны две детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X-числа нестандартных деталей среди двух отобранных.

Ответ: 3/5

Задание 7. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X- -числа таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно двадцати.

Ответ: M(x)=nP=20

Задание 8. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадут на всех гранях.

Ответ: M(x)=(7/2)n