Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение «Техникум транспорта г.Орска имени Героя России С.А. Солнечникова»

«Матрицы и определители»

учебное пособие

Орск, 2018г

Изложены основные формулы и понятия, правила и свойства, включающие в себя умение и навыки в нахождении матрицы и вычислении определителя. Приведены формулы, правила и свойства матрицы и определителя, перечень практических работ, перечень самостоятельных работ студентов, перечень для аудиторной и домашних работ, пример выполненного задания.

Учебное пособие предназначено для студентов 2-го курса по дисциплине ЕН.01 Математика ГАПОУ Техникум транспорта г.Орска всех специальностей.

Содержание

Введение

Математика подобна башне, фундамент которой был заложен много веков назад и в которой всё ещё достраивается верхний этаж. Чтобы оценить общий ход строительства, надо подняться на самый верхний этаж по очень крутой лестнице с множеством ступеней. Роль состоит в том, чтобы втащить слушателя в лифт и довезти к вершине, откуда он не увидит ни промежуточных этажей, ни веками украшавшихся комнат, но сможет убедиться, что здание очень высокое и продолжает расти.

Таким образом, при решении различных задач математики очень часто приходится иметь дело с таблицами чисел, называемых матрицами. С помощью матриц удобно решать системы линейных уравнений, выполнять многие операции с векторами, решать различные задачи компьютерной графики и другие инженерные задачи. Одним из способов решения систем линейных уравнений являются определители, которые составляются из матриц.

Матрицы и определители

Раздел 1. Матрицы

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит **m** строк и **n** столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента a_{ij} первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j – номер столбца.

Пусть дана таблица (называемая матрицей), состоящая из четырех чисел: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Матрица имеет две строки $a_{11}\ a_{12}$ и $a_{21}a_{22}$ и два столбца $\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \end{matrix}$ и $\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \end{matrix}$.

Числа, составляющие эту матрицу, обозначены буквой с двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, а второй- номер столбца, в которых стоит данное число. Например, a_{12} означает число, стоящее в первой строке и втором столбце; a_{21}- число, стоящее во второй строке и первом столбце. Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} будем называть элементами матрицы.

Матрицу для кратности будем обозначать одной буквой, например:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Две матрицы **A** и **B** называются равными (A=B), если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны.

Так, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то A=B, если $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$.

Виды матриц:

а) Прямоугольный (Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$) например, матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}$).

Сокращенно прямоугольную матрицу типа m X n можно записал так: $A = (a_{ij})$, где $i=1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

б) Квадратный (Если число строк равно числу столбцов ($m=n$)). Например, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$.

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее порядком. Так, в последнем примере порядок матрицы A равен 2, а порядок матрицы B равен 4.

Диагональ, содержащую элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, будем называть ***главной***, а диагональ, содержащую элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$, - ***побочной*** (или вспомогательной).

в) Диагональный (Матрица у которых отличны от нуля только элементы, находящиеся на главной диагонали: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{12} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Например, матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

г) Скалярный (Если у диагонали матрицы все числа главной диагонали равны между собой, т.е. $a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}$;

д) Единичный (Если в скалярной матрице все числа главной диагонали равны единице и обозначается буквой E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

е) Нулевой (матрица, все элементы которой равны нулю и обозначаются так:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}).$$

Нуль-матрица при сложении матриц выполняет роль обычного нуля при сложении чисел: A+0=A.

Например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

В прямоугольной матрице типа m X n возможен случай, когда m=1. При этом получается матрица-**строка:**

$A = (a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n})$.

В случае, когда n = 1, получаем матрицу-**столбец:**

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы-строки и матрицы-столбцы иначе будем называть **векторами**.

ж) Равные (Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковое число строк **m** и одинаковое число столбцов **n** и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$).

Так, матрицы

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$

равны, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{23}$.

Равные матрицы обязательно имеют одно и то же строение: либо обе они прямоугольные типа m X n, либо квадратные одного и того же порядка n.

Если в матрице типа **m ×n,** имеющий вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

переставить строки со столбцами, получил матрицу типа **n × m**, которую будем называть транспонированной матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В том случае, когда матрица состоит из одной строки (матрица-строка), т. е.

$B = (b_1\ b_2\ \dots\ b_n)$,

транспонирования матрица является матрицей-столбцом:

$$B^{т}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами

Суммой матриц **A** и **B** условимся называть такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц **A** и **B**. Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковые строение: или прямоугольные типа **m × n,** или квадратные порядка **n.**

Пусть $A =\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B =\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Тогда сумма матриц $C= A+B$ имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

где $c_{11}=a_{11}+b_{11}, c_{12}=a_{12}+b_{12}; \dots \dots c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \dots \dots, c_{mn}=a_{mn}+b_{mn}$.

Если даны две квадратные матрицы одного порядка, например

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то их **суммой** называется матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется сумма двух прямоугольных матриц, имеющих одинаковое число строк и одинаковое число столбцов.

Пример 1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 1+3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Например, сложить матрицы А и В, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad$ В $= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Здесь А и В – квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, В $= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. б) Здесь **А и В** – прямоугольные матрицы **типа 2×3**. Складываем их: соответствующие элементы

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2-4 & -3+1 \\ 2+3 & -4+0 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. в) Здесь **А и В** – квадратные матрицы третьего порядка. Складываем их соответствующие элементы:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2-5 & 1+3 & 3+16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+7 & 3+10 & 8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

Г) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. г) эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как **А** есть матрица типа **3Х 2**, а **В-** матрица типа **2Х3**; можно складывать прямоугольные матрицы одного типа.

Мы видим, что сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяются важнейшие свойства чисел:

1) переместительный закон сложения: А + В = В + А , где **А** и **В** – либо квадратные матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одного типа m X n;

2) сочетательный закон сложения (A + B) + C = A + (B + C), где A, B, C – либо квадратные матрицы одного порядка **n**, либо прямоугольные матрацы одного типа **m x n.**

Например, доказать справедливость равенств:

а) A + B = B + A для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix};$$

б) (A + B) + C = A + (B + C) для матриц

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Из сказанного выше вытекает равенство

$$A + 0 = A,$$

т.е. существует такая нулевая матрица (того же порядка или типа) , что ее сумма с матрицей **A** любого типа равна матрице **A**.

Для любой матрицы **A** существует матрица **- A**, такая, что A + (- A) = 0, т.е. матрица, противоположная **A.**

Произведением матрица **A** на число **K** называется такая матрица **KA,** каждый элемент которой равен $\mathbf{Ka}_{ij}$, т.е.

если **A** $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то **K**A =

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}a_{11} & \mathbf{K}a_{12} & \cdots & \mathbf{K}a_{1n} \\ \mathbf{K}a_{21} & \mathbf{K}a_{22} & \cdots & \mathbf{K}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{K}a_{m1} & \mathbf{K}a_{m2} & \cdots & \mathbf{K}a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Например, а) Умножить матрицу **A** $= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число **K** = 3.

Решение. Умножая каждый элемент матрицы **A** на 3, получим

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Найти матрицу, противоположную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения противоположной матрицы умножаем матрицу **A** на **K** =-1:

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

в) Найти линейную комбинацию 3A – 2B, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение: Сначала находим произведение **A** на $\mathbf{K_1 = 3}$ и **B** на $\mathbf{K_2 = -2}$:

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix}, \quad -2B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем сумму полученных матриц:

3A – 2B, если $A = \begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}$.

Умножение матриц

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка.

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведение этих матриц называется матрица

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти элемент c_{11} первой строки и первого столбца матрицы С, нужно каждый элемент первой строки матрицы А (т.е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы В (т.е. b_{11} и b_{21}) и полученные произведения сложить: $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21}$;

чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы С, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответсвующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить: $c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$;

аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22}.

Вообще, чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы-произведения, нужно все элементы i-й строки ($a_{i1}, a_{i2},\ldots\ldots, a_{in}$) матрицы А умножить на соответсвующие элементы j-го столбца ($b_{1j}, b_{2j},\ldots., b_{nj}$) матрицы В и полученные произведения сложить.

Например, а) найти произведение матриц А и В, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Решение. Найдём каждый элемент матрицы-произведения:

$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=3*1+1*2+1*1=6;$

$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=3*1+1*(-1) +1*0=2;$

$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}=3*(-1) +1*1+1*1=-1;$

$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=2*1+1*2+2*1=6;$

$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}=2*1+1*(-1) +2*0=1;$

$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{23}b_{33}=2*(-1) +1*1+2*1=1;$

$c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}=1*1+2*2+3*1=8;$

$c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{33}=1*1+2*(-1) +3*0=-1;$

$c_{33}=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}=1*(-1) +2*1+3*1=4;$

Следовательно,

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц.

б) найти произведение АВ, если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix} 0*3+(-1)*2+2*1 & 0*1+(-1)*1+2*0 \\ 2*3+1*2+1*1 & 2*1+1*1+1*0 \\ 3*3+0*2+1*1 & 3*1+0*1+1*0 \\ 3*3+7*2+1*1 & 3*1+7*1+1*0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

Если в этом примере мы попытаемся найти произведение **ВА,** то убедимся, что это невозможно.

Для прямоугольных матриц справедливы следующие правила:

1) умножение матрицы **A** на матрицу **B** имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы **A** равно числу строк матрицы **B**;

2) в результате умножения двух прямоугольных матрицы получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

Свойства умножения матриц

Пусть $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 1\,3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3\,1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}$.

Найдем произведения AB и BA:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 1\,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\,1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*3+(-1)*1\;2*1+(-1)*(-1) \\ 1*3+3*1\;1*1+3*(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,3 \\ 6 - 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3\,1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 1\,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3*2+1*1\;3*(-1)+1*3 \\ 1*2+(-1)*1 1*(-1)+(-1)*3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,0 \\ 1 - 4 \end{pmatrix}$$

Мы видим, что AB$\neq$ BA. Этот пример показывает, что произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону.

Можно проверить, что для умножения матриц выполняется сочетательный закон:

$$\mathrm{A(BC) = (AB)C},$$

а так же распределительный закон

$$\mathrm{(A+B)C=AC+BC}$$

Отметим следующий любопытный факт. Известно, что произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц это не всегда справедливо, т.е. возможен случай, когда произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице.

Например, если

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -1\,1 \end{pmatrix},$$

то

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 1*1+1*(-1)\;1*(-1)+1*1 \\ 1*1+1*(-1)\;1*(-1)+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы.

1. Определитель матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядков.

Пусть дана квадратная матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\;a_{12} \\ a_{21}\;a_{22} \end{pmatrix}$$

Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель второго порядка записывается так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Отметим, что определитель второго порядка равен разности попарных произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Например, вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 5(-3) = -8 + 15 = 7$

б) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 * b^2 - ab * ab = a^2b^2 - a^2b^2 = 0$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Определителем (или детерминантом) третьего порядка, соответствующим данной матрице, называется число

$a_{11}\, a_{21}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$.

Определитель третьего порядка записывается так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{21}\, a_{32}\, a_{13} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}.$$

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться правилом треугольников **(правилом Сарруса**). Это правило проиллюстрируем на схеме:

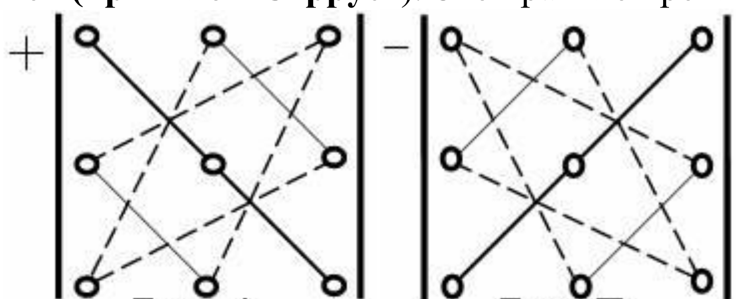

Рис. А Рис. Б

Три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали ($a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали ($a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$ и $a_{21}\ a_{32}\ a_{13}$). Три отрицательных его члена есть произведения элементов побочной диагонали ($a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали ($a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$ и $a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$).

Например, вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3*5*3+2*3*3+2*4*1-1*5*3-2*2*3-3*3*4 = 45++18+8-15-12-36 = 71-63 = 8$

б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = a\cdot c\cdot b + b\cdot a\cdot c + c\cdot b\cdot a - c\cdot c\cdot c - b\cdot b\cdot b - a\cdot a\cdot a = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

2. Основные свойства определителей.

1) Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами (т.е. транспонировать):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{22}} \\ \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{22}} \end{vmatrix}$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4-(-2)\cdot 5 = 2$$

Это свойство называют свойством равноправности строк и столбцов.

2) При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит свой знак на противоположный:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \\ \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \end{vmatrix}$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)\cdot 2+(-2)\cdot 1\cdot 3+2\cdot(-5)\cdot 3-3\cdot(-4)\cdot 3-(-2)\cdot 2\cdot 2-1\cdot 1\cdot(-5) = -8-6-30+36+8+5 = -44+49 = 5$$

Поменяв местами, первый и второй столбцы, получим:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2\cdot 2+1\cdot 1\cdot(-5)+(-4)\cdot 3-3\cdot 2\cdot(-5)-(-2)\cdot 3\cdot 1-1(-4)\cdot 2 = -8-5-36+30+6+8 = -49+44 = -5$$

3) Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ϰa_{12} \\ a_{21} & ϰa_{22} \end{vmatrix} = ϰ\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) - (-2) \cdot 7 = -4.$$

Если множитель (-2) вынести за знак определителя, то получим:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2(3 \cdot 3 - 7 \cdot 1) = -2 \cdot 2 = -4.$$

4) Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1*1*4+1*3*2+1*(-1)*3-3*1*2-1*1*4-3*(-1)*1$$
$$= 4+6-3-6-4+3 = 0$$

Из свойств 3 и 4вытекает следующее свойство:

5) Если все элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3*3*(-2)+7*(-1)*4+2*6*1-4*3*1-6*(-1)*3-2$$
$$*7(-2) = -18-28+12-12+18+28 = 0$$

6) Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ϰa_{12} & a_{12} \\ a_{21} & ϰa_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

7) Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, - нули, равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

3. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $D=|a_{ij}|$, где i и j меняются от 1 до n, называется такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Например, минор M_{12}, соответствующий элементу a_{12} определителя

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{213} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Получается, если вычеркнуть из определителя D первую строку и второй столбец, т.е.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Например, а) записать все миноры определителя.

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Решение.

$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; $M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; $M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$;

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$; $M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; $M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$;

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$; $M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$; $M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

б) записать все миноры определителя

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} принято обозначать A_{ij}.

Таким образом, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

в) найти алгебраические дополнения элементов a_{13}, a_{21}, a_{31} определителя

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$$

Решение.

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(10-6) = -4$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6$

Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца

Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя D на их алгебраические дополнения равна этому определителю, т.е.

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

или

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

Эти соотношения называются разложением определителя, но элементам i-й строки или j-го столбца.

Например, определитель

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

разложить: а) по элементам 1-й строки; б) по элементам 2-го столбца.

Решение.

а) $D = 3\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ -4 & 2\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 0 & 2\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -4\end{vmatrix} = 3\cdot(4+20) - 1\cdot(-2-0) + 2\cdot(4-0) = 72+2+8 = 82$

б) $D = -1\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 0 & 2\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix} = (-1)(-2) + 2\cdot 6 - (-4)\cdot 17 == 2+12+68 = 82.$

Если определитель имеет четвертый или более высокий порядок, то его также можно разложить по элементам строки или столбца, а затем понижать порядок алгебраических дополнений.

Например, вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix}3 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 4\\ 0 & 4 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Решение. Разложим определитель по элементам 1-й строки (так как она содержит два нулевых элемента):

$$D = \begin{vmatrix}3 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 4\\ 0 & 4 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & -2 & 3\\ 5 & 0 & 1\end{vmatrix} +$$

$$+2\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 3\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Поскольку второй и четвертый члены разложения равны нулю, имеем

$$D = 3\left[3\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix} - 1\right)\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix} + 2\left[2\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix}0 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}\right] == 3[3(-2) - (-1)(4-6) + 4*4] + 2[2(4-6) - 3(-15) + 4(-20)] = 3(-6-2++16) + 2(-4+45-80) = 24-78 = -54.$$

Перечислим различные способы вычисления определителей:

1. Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение. Этим способом удобно находить определители второго и третьего порядков, а для определителя более высокого порядка применим следующий способ.

2. Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.

3. Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду. Этот способ основан на том, что в силу свойства 7 треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Чтобы получить треугольный определитель, нужно, используя свойство 6, к какой-либо строке (или столбцу) заданного определителя прибавлять соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, до тех пор, пока не придем к определителю треугольного вида.

Пусть, например, требуется вычислить определитель:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Вычитая первую строку из всех остальных, сразу получим определитель треугольного вида:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$$

Литература

1. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика в задачах с решениями: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань» , 2011, - 464с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

2.Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учебное пособие для техникумов.- 3-е изд.- М.: Высшая школа, 1990.-495с.

3.Дадаян А.А. Математика: Учебник 2-е изд.- М.: Форум - Инфра – М, 2006. – 552с.

Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. М.: Оникс 21 веек, 2003.- 303с., 415 с.

Интернет-ресурсы: доступ

-http://www.ege.edu.ru/ Официальный информационный портал ЕГЭ;
- http://www.fipi.ru/ Федеральный институт педагогических измерений.

Приложение
Упражнения для контроля полученных знаний
Тренажер 1

1-3. Сложить матрицы A и B:

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

1-3. Вычислить линейные комбинации матриц:

1. 2A – B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. 3A + 2B, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$,

3. 2A + 3B –C, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$

1-3. Найти произведения матриц:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1-4. Найти произведение AB:

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тренажер 2

Вычислить C = A^2+2B, где

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

Найти AB-BA, где

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Найти 3A∗2B, если

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Найти AE, если

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Найти EA, если

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

Тренажер 3

1-2. **Вычислить определители**:

1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 3. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$; 5. $\begin{vmatrix} a+b & b \\ 2a & a-b \end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

1-9. Вычислить определители третьего порядка:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; 4. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b=x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$; 5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

3. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$; 6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$;

7. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; 8. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$; 9. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$.

1-3. Вычислить определители четвертого порядка:

$$1.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \qquad 2.\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}; \qquad 3.\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$$

Найти алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{22}, a_{32} определителя

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Образец решения Тренажера 4:

1. Сложить матрицы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 1+3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 - 1\cdot 3 & 3\cdot 1 - 1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 2\cdot 1 & -1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$